§ 1. СВЯЗИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

В аналитической механике необходимо более подробно рассмотреть связи, налагаемые на точки механической системы. *Механической системой*, как известно, называют любую совокупность материальных точек. *Условия, ограничивающие свободу перемещения точек механической системы, называются связями.* Математически связи могут быть выражены уравнениями или неравенствами, в которые входят время, координаты всех или части точек системы и их производные по времени различных порядков. Для одной точки уравнение связи в общем случае можно выразить в форме

$$f(x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z};\ \ddot{x},\ \ddot{y},\ \ddot{z};\ \ldots;\ t)=0. \tag{1}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением связей, в уравнения которых могут входить производные по времени от координат не выше первого порядка.

Для механической системы, состоящей из N точек, l уравнений связей представятся системой уравнений

$$f_s(x_k,\ y_k,\ z_k;\ \dot{x}_k,\ \dot{y}_k,\ \dot{z}_k;\ t)=0,\quad s=1,\ 2,\ \ldots,\ l. \tag{2}$$

Считается, что индекс k принимает все или часть значений от 1 до N как для координат, так и для их производных.

Если в уравнения связей (2) входят только координаты точек и не входят производные от координат, то связи называются *геометрическими*. Уравнение геометрической связи для системы имеет форму

$$f(x_k,\ y_k,\ z_k,\ t)=0.$$

Если в уравнения связей кроме координат входят еще и их производные по времени (проекции скоростей точек на оси координат) или только одни производные, кроме времени, то связи называются *кинематическими*. В этом случае уравнения связей являются дифференциальными уравнениями для координат точек. Из геометрических связей дифференцированием можно получить связи кинематические. Из кинематических связей геометрические получаются не всегда, так как дифференциальные уравнения не всегда могут быть проинтегрированы. Иногда дифференциальное уравнение связи можно представить как производную по времени от некоторой функции координат и, возможно, времени:

$$\frac{d}{dt}\varphi(x_k,\ y_k,\ z_k,\ t)=0.$$

После интегрирования такая кинематическая связь становится геометрической.

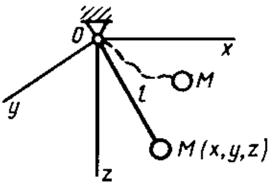

Рис. 93

Все геометрические и интегрируемые кинематические связи называются *голономными*. Неинтегрируемые кинематические связи, которые нельзя свести к геометрическим, являются *неголономными*. Важный класс механических систем с неголономными связями (неголономных систем) интенсивно исследуется в настоящее время, и эти исследования еще далеки от завершения. В дальнейшем изложении систематически системы с такими связями не рассматриваются.

При движении механической системы координаты точек и их производные по времени, входящие в уравнения связей, могут зависеть от времени. Кроме того, в уравнения связей время может входить явно, помимо координат и их производных. Связи, в уравнения которых время явно не входит, называются *стационарными* или *склерономными*. Если время входит явно в уравнение связи, то связь называется *нестационарной* и *реономной*. Нестационарные связи обычно реализуются посредством движущихся или деформирующихся тел. В простейшем случае одной точки нестационарная геометрическая связь в форме движущейся или деформируемой поверхности имеет уравнение

$$f(x,\ y,\ z,\ t)=0.$$

Связи называют *неосвобождающими* или *двусторонними*, если они выражаются математически уравнениями, и *освобождающими* или *односторонними*, если они выражаются неравенствами. Для одной точки M, скрепленной с концом жесткого стержня, другой конец которого закреплен в неподвижной точке O, связь (жесткий стержень) является геометрической, неосвобождающей (рис. 93). Ее уравнение

$$x^2+y^2+z^2-l^2=0,$$

где l — длина стержня. Если стержень заменить нитью такой же длины, то связь (нить) будет освобождающей. Она математически выражается неравенством $x^2+y^2+z^2-l^2\leqslant 0$.

Если при движении точка M окажется от точки O на расстоянии, меньшем длины нити, то нить уже не стесняет свободу перемещения точки. Связь освобождает точку от своего действия (пунктир на рис. 93). В дальнейшем освобождающие связи рассматривать не будем.

Все связи можно разделить на реальные и идеальные. К идеальным связям относятся все связи без трения. Некоторые связи с трением тоже относятся к идеальным. Понятие идеальных связей дается после введения понятия возможного перемещения системы.